CHAPITRE 1

NOMBRES RELATIFS

1 Priorités de calculs

Propriété 1 (calculs sans parenthèses)
Dans une expression sans parenthèses qui ne contient que des additions et des soustractions, on effectue les calculs de gauche à droite.

Exemple
Calculer les expressions suivantes.

A= $10+3+4$. B= $10+4+3$. C= $11-5+1$. D= $11-1+5$.

Réponses

A= $10+3+4=$ ...

B= $10+4+3=$ ...

C= $11-5+1=$ ...

D= $11-1+5=$ ...

Propriété 2 (calculs sans parenthèses)
Dans une expression sans parenthèses qui ne contient que des multiplications et des divisions, on effectue les calculs de gauche à droite.

Exemples

Calculer les expressions suivantes.

A= $2 \times 3 \times 7$. B= $7 \times 2 \times 3$. C= $300 \div 10 \div 2$. D= $75 \div 5 \times 3$.

Réponses

A= $2 \times 3 \times 7 = \ldots$

B= $7 \times 2 \times 3 = \ldots$

C= $300 \div 10 \div 2 = \ldots$

D= $75 \div 5 \times 3 = \ldots$

Propriété 3 (calculs sans parenthèses)

Dans une expression sans parenthèses, la multiplication et la division sont prioritaires sur l'addition et la soustraction.

Exemples

Calculer les expressions suivantes.

A= $5 + 3 \times 2$. B= $10 - 2 \times 4$. C= $4 + 10 \div 2$. D= $5 \times 4 + 2 \times 3$.

Réponses

A= $5 + 3 \times 2 =$

B= $10 - 2 \times 4 =$

C= $4 + 10 \times 2 =$

D= $5 \times 4 + 2 \times 3 =$

Propriété 4 (calculs avec parenthèses)

Dans une expression comportant des parenthèses, on effectue d'abord les calculs entre parenthèses.

Lorsqu'il y a des parenthèses imbriquées, on calcule en priorité le contenu des parenthèses les plus intérieures.

Exemples

Calculer les expressions suivantes.

A= $(5+3) \times 2$.

B= $4 \times (10-7)$.

C= $(2+3) \times (4+5)$.

D= $(10-(5-2)) \times (7+3)$.

Réponses

A= $(5+3) \times 2 =$

B= $4 \times (10-7) =$

C= $(2+3) \times (4+5) =$

D= $(10-(5-2)) \times (7+3) =$

Propriété 5 (priorités de calcul dans un quotient)
Si un quotient comporte une expression au numérateur ou au dénominateur, on traite cette expression comme si elle était entourée de parenthèses.

Exemples

Calculer les expressions suivantes.

A= $\dfrac{7+21}{12-5}$.

B= $\dfrac{100+7}{100+2}$.

Réponses

A= $\dfrac{7+21}{12-5} = \ \dots$

B= $\dfrac{100+7}{100+2} = \ \dots$

Définition 1 (somme algébrique)
Une **somme algébrique** est une suite d'additions et de soustractions.

Propriété 6 (simplification d'écriture)
Dans une somme algébrique :

- on peut supprimer le signe + devant le premier terme du calcul s'il est positif ;
- on peut supprimer les signes d'addition et les parenthèses autour d'un nombre.

Exemples
Simplifier les écritures suivantes.

A= $+4+2$. B= $(7)-(3)+(1)$. C= $+(+25)$.

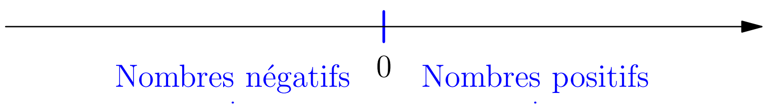
Réponses

A= ... B= ... C= ...

2 Nombres relatifs

Définition 2 (nombres relatifs)
On appelle **nombres relatifs** l'ensemble des nombres positifs, des nombres négatifs et de zéro.

Remarque
On peut représenter les nombres relatifs sur une droite graduée.



Propriété 7 (comparer des nombres relatifs)
Comparer deux nombres, c'est déterminer s'ils sont égaux ou si l'un est supérieur (ou inférieur) à l'autre.

Un nombre positif est toujours plus grand qu'un nombre négatif.
Si deux nombres sont positifs, le plus grand est toujours celui qui a la plus grande distance à zéro.
Si deux nombres sont négatifs, le plus grand est le plus proche de zéro.

Exemple

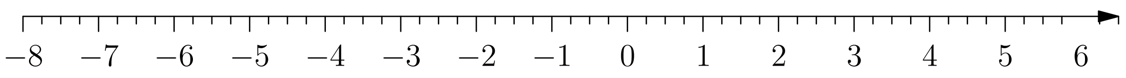
1. Placer les nombres suivants sur une droite graduée.

   a. 5,6 et 3,5.
   b. -2,5 et 1.
   c. -4 et -0,7.
   d. -2,5 et -7.

2. Les comparer deux à deux.

Réponse

1. Sur une droite graduée, les nombres sont alors rangés, de gauche à droite, par ordre croissant.



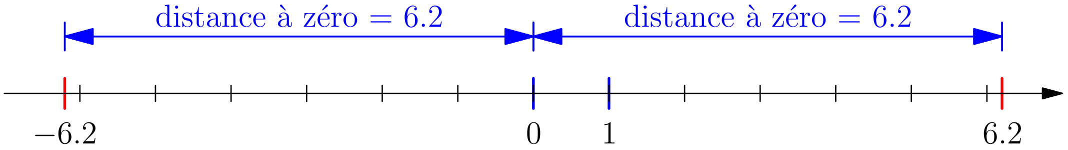
2. Comparons les nombres deux à deux.
   On peut observer leur position sur la droite graduée.
   Le nombre le plus à gauche (sur la droite graduée) est le plus petit des deux.

   a. $5,6 \ldots 3,5$.
   b. $-2,5 \ldots 1$.
   c. $-4 \ldots -0,7$.
   d. $-2,5 \ldots -7$.

Définition 3 (opposé d'un nombre)
L'**opposé** d'un nombre relatif est le nombre de signe contraire qui a la même distance à zéro.

Exemples

a. L'opposé de (+6,2) est ....



b. (−3,8) et ... sont deux nombres opposés l'un de l'autre.

c. L'opposé de 0 est ...

Propriété 8 (opposé de l'opposé d'un nombre)
L'opposé de l'opposé d'un nombre est le nombre lui-même.

Propriété 9 (somme d'un nombre et de son opposé)
La somme d'un nombre et de son opposé est nulle.

Exemples

a. $-(-7) = \ \dots$

b. $(-15) + (15) = \ \dots$

c. $(13{,}9) + (-13{,}9) = \ \dots$

3 Additionner des nombres relatifs

Propriété 10 (additionner des relatifs de même signe)
Soit $a + b$ la somme de deux termes de même signe.
Cette somme :

- a pour distance à zéro la somme des distances à zéro des deux nombres ;
- a le même signe que ces deux nombres.

Propriété 11 (additionner des relatifs de signes contraires)
La somme de deux termes de signes contraires :

- a pour distance à zéro la différence des distances à zéro des deux termes ;
- a le signe du terme ayant la plus grande distance à zéro.

Exemple
Amélie (A), Ben (B), Cordelia (C), Dimitri (D) et Elyas (E) ont joué chacun une partie d'un jeu en deux manches contre un ordinateur.
Voici leurs résultats.

Joueur	A	B	C	D	E
Première manche	7	5	-4	-6	7
Seconde manche	-3	-8	3	2	-7

1. Calculer le score total de chaque joueur.
2. Indiquer le joueur ayant le score le plus élevé.

Réponses :

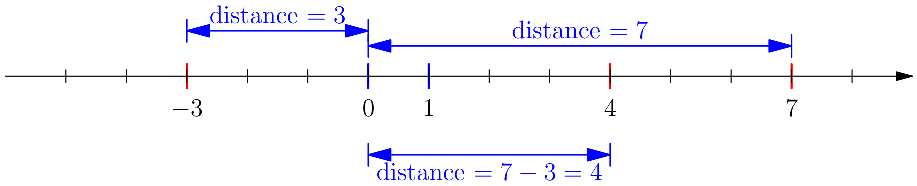
1. a. Amélie marque 7 point puis en perd 3.
   Elle marque (+7) points dans la première partie et (-3) points dans la seconde.
   Son total A est donné par l'expression :

$$A = \ \dots$$

   Exploitons la propriété précédente.

   – La distance à zéro de la somme est égale à la « différence des distances à zéro des deux termes », soit $\ \dots$.

   Représentons la situation à l'aide d'une droite graduée :



   – Des deux nombres $(+7)$ et (-3), celui qui a la plus grande distance à zéro est $(+7)$, qui est positif.
   $(+7) + (-3)$ est donc également positif.

   Conclusion :

$$A = \ \dots$$

   b. $B = \ \dots$

   c. $C = \ \dots$

   d. $D = \ \dots$

   e. La somme de deux nombres opposés est nulle, donc :
   $E = \ \dots$

   Nous pouvons maintenant compléter le tableau des scores.

Joueur	A	B	C	D	E
Total	...	...	...	...	...

2. ... a le score total le plus élevé, avec ... points.

Propriété 12 (signe d'une somme)
La somme de deux nombres positifs est un nombre positif.
La somme de deux nombres négatifs est un nombre négatif.
La somme de deux nombres de signes contraires a le même signe que celui des deux nombres qui a la plus grande distance à zéro.

Exemple
Indiquer le signe des expressions suivantes.

a) $(+7\,793\,215) + (+58\,645\,214)$.

b) $(-357) + (-239\,741)$.

c) $(+1\,354) + (-57)$.

d) $(-36) + (936)$.

Réponses

a) ... b) ... c) ... d) ...

4 Soustraire des nombres relatifs

Propriété 13 (soustraire un nombre relatif)
Soustraire un nombre relatif, c'est ajouter son opposé.

Exemples
Calculer :

A= $(+4) - (-3)$. B= $(-5) - (-2)$. C= $(+2,7) - (-1.3)$.

Réponses

A= $(+4) - (-3) = \ldots$

B= $(-5) - (-2) = \ldots$

C= $(+2,7) - (-1.3) = \ldots$

Méthode (évaluer une somme algébrique)

Pour évaluer une somme algébrique on peut :

- transformer les soustractions en additions ;
- supprimer deux à deux les termes opposés ;
- changer les termes pour calculer astucieusement, si les seules opérations sont des additions.

Exemple

Calculer $F = 7,03 - 4,37 - 2 - 6 - 0,03 + 4,37$.

Réponse

Calculs	Commentaires
$F = 7,03 - 4,37 - 2 - 6 - 0,03 + 4,37$	
$F = 7,03 + (-4,37) + (-2) + (-6) + (-0,03) + 4,37$	Transformer les soustractions en additions.
$F = 7,03 + 4,37 + (-4,37) + (-2) + (-6) + (-0,03)$	Organiser les calculs de façon astucieuse.
$F = 7,03 + 0 + (-2) + (-6) + (-0,03)$	La somme de $(+4,34)$ et de son opposé est nulle.
$F = 7,03 + (-0,03) + (-2) + (-6)$	On rapproche 4,03 et -0,03.
$F = 7 + (-2) + (-6)$	On calcule de gauche à droite.
$F = 5 + (-6)$	idem.
$F = -1.$	

5 Multiplier deux nombres relatifs

Propriété 14 (règle des signes)

Le produit de deux nombres de même signe est positif.

Le produit de deux nombres de signes différents est négatif.

Méthode

Pour multiplier deux nombres :

- on effectue le produit des distances à zéro ;
- on détermine le signe du produit avec la règle des signes.

Exemples

Déterminer le signe puis la valeur des produits suivants.

A= $(+3) \times (-4)$. B= $(-7) \times (-5)$. C= $(-3,4) \times (2,5)$.

Réponses

A= $(+3) \times (-4) = \ \dots$

B= $(-7) \times (-5) = \ \dots$

C= $(-3,4) \times (2,5) = \ \dots$

Propriété 15 (ordre des facteurs)
Un produit ne change pas lorsqu'on change l'**ordre** de ses facteurs.

Exemple

Calculer astucieusement.

A= $5 \times 5 \times 5 \times 2 \times 2 \times 2$. B= $(0,25) \times (17) \times (-4)$.

Réponses

A= $5 \times 5 \times 5 \times 2 \times 2 \times 2 = \ \dots$

B= $(0,25) \times (17) \times (-4) = \ \dots$

Propriété 16 (multiplication par 1 ou par 0)
Pour tout nombre relatif a, on a :

$$1 \times a = a \times 1 = a.$$

$$0 \times a = a \times 0 = 0.$$

Exemples

a. $283 \times 1 = \ \dots$

b. $1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = \ \ldots$

c. $3 \times 7 \times 0 \times 2 = \ \ldots$

6 Multiplier plusieurs nombres relatifs

Propriété 17 (règles des signes étendue)
Lorsqu'on multiplie plus de deux nombres relatifs, le signe du produit ne dépend que du nombre de facteurs négatifs :

- si le nombre de facteurs négatifs est pair, le produit est positif ;
- si le nombre de facteurs négatifs est impair, le produit est négatif.

Exemples

1. Justifier le signe des expressions suivantes :
   a. $(-2) \times (3) \times (-4) \times (-5)$.
   b. $(-2) \times (3) \times (-4) \times (-5) \times (-6)$.
   c. $(-2) \times (3) \times (-4) \times (-5) \times 0 \times (-6)$.
2. Calculer en détaillant :

   d. $6 \times (-7)$. e. $(-3) \times 4$. f. $(-6) \times (-8)$.

Réponses

1. a. Le produit $(-2) \times (3) \times (-4) \times (-5)$ comporte un nombre impair de facteurs négatifs (soit ... facteurs négatifs).
   Donc, ce produit est un nombre ...
   b. Le produit $(-2) \times (3) \times (-4) \times (-5) \times (-6)$ comporte un nombre pair de facteurs négatifs (soit ... facteurs négatifs).
   Donc, ce produit est un nombre ...
   c. L'un des facteurs du produit $(-2) \times (3) \times (-4) \times (-5) \times 0 \times (-6)$ est nul, donc ce produit est ...
2. d. $6 \times (-7) = \ \ldots$
   e. $(-3) \times 4 = \ \ldots$
   f. $(-6) \times (-8) = \ \ldots$

7 Division de nombres relatifs

Définition 4 (quotient, numérateur, dénominateur, fraction, écriture fractionnaire)
Soient a et b deux nombres entiers avec $b \neq 0$.
Le **quotient** $\frac{a}{b}$ est le nombre qui, multiplié par b, donne a.

$$\frac{a}{b} \times b = a.$$

a est le **numérateur**.
b est le **dénominateur**.
Si a et b sont deux nombres entiers, $\frac{a}{b}$ est une **fraction**.
Sinon, c'est une **écriture fractionnaire**.

Exemple

Déterminer si les écritures suivantes sont des fractions.

a. $\frac{-3}{4}$.   b. $\frac{17,9}{7}$.   c. $\frac{2}{0}$.

Réponse

a. Le quotient $\frac{-3}{4}$ est une fraction, car (-3) est un entier et 4 un entier non nul.
Le numérateur de cette fraction est ... et son dénominateur est ...

b. L'écriture $\frac{17,9}{7}$ est une écriture fractionnaire, mais ce n'est pas une fraction, car $17,9$ n'est pas un entier.

c. Puisqu'il est impossible de diviser un nombre par 0, $\frac{2}{0}$ n'est pas un nombre, ce n'est donc pas une fraction.

Définition 5 (diviseur, divisible, multiple)
Soient a et b deux entiers non nuls et p un nombre relatif avec :

$$\frac{a}{b} = p.$$

Si p est un entier, alors :

- le nombre p est un **diviseur** de a.
- le nombre a est **divisible** par p.
- le nombre a est un **multiple** de p.

Exemple

Sachant que $56 = 8 \times 7$, compléter les phrases suivantes.

1. Les entiers ... et ... sont des diviseurs de ...
2. Le nombre ... est divisible par ... et par ...
3. Le nombre 56 est un multiple de ... et de ...

Propriété 18 (expression d'un quotient)

Soit a un nombre relatif et b un nombre relatif non-nul.

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}.$$

Exemples

a. $\frac{2}{3} = 2 \times \frac{1}{3}$.

b. $\frac{-3}{7} = (-3) \times \frac{1}{7}$.

c. $\frac{-5}{-17} = (-5) \times \frac{1}{(-17)}$.

Propriété 19 (règle des signes)

Le quotient de deux nombres de même signe est positif.

Le quotient de deux nombres de signes différents est négatif.

Exemples

1. Justifier le signe des expressions suivantes.

   a. $\frac{-2}{3}$.

   b. $\frac{3}{-7}$.

   c. $\frac{-5}{-17}$.

2. Calculer en détaillant :

   d. $(-12) \div 4$.

   e. $(3) \div (-7)$.

   f. $(-24) \div (-8)$.

Réponses

1. a. $\frac{-2}{3}$ est le quotient de deux nombres de signes contraires : c'est donc un nombre ...

b. $\dfrac{3}{-7}$ est le quotient de deux nombres de signes contraires : c'est donc un nombre ...

c. $\dfrac{-5}{-17}$ est le quotient de deux nombres de même signe : c'est donc un nombre ...

2. d. $(-12) \div 4 = \ldots$

e. $(3) \div (-7) = \ldots$

f. $(-24) \div (-8) = \ldots$

Propriété 20 (signe d'une expression)

Si une expression ne comporte que des multiplications et des divisions, son signe ne dépend que du nombre de facteurs négatifs.

Si le nombre de facteurs négatifs est pair, le signe de l'expression est positif.

Si le nombre de facteurs négatifs est impair, le signe de l'expression est négatif.

Exemples

Déterminer le signe des expressions suivantes :

$J = \dfrac{(7) \times (-3) \times (-2)}{(11) \times (-13)}$.

$K = \dfrac{(-2) \times (-3) \times (-5)}{(7) \times (-11) \times (13)}$.

Réponse

A comporte ... facteurs négatifs. ... est un nombre impair, donc A est ...

B comporte ... facteurs négatifs. ... est un nombre pair, donc B est ...